

УДК 37.041; 374. 32

DOI <https://doi.org/10.32782/2410-2075-2025-21.11>

ТРАСК-ПІДХОДИ ЕФЕКТИВНОГО ВИКОРИСТАННЯ ІТ ТЕХНОЛОГІЙ НА ПРИКЛАДІ НАВЧАННЯ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

БАБІЙ НАДІЯ ВАСИЛІВНА

кандидат технічних наук,
доцент кафедри інформаційних технологій та методики навчання інформатики
Кременецька обласна гуманітарно-педагогічна академія ім. Тараса Шевченка
skakalskanv@meta.ua
orcid.org/0000-0003-2239-2220

ЛОМАКОВИЧ АФАНАСІЙ МИКОЛАЙОВИЧ

заслужений працівник народної освіти України,
кандидат фізико-математичних наук, професор,
ректор
Кременецька обласна гуманітарно-педагогічна академія ім. Тараса Шевченка
Lomacovicham@gmail.com
orcid.org/0000-0002-4955-2442

ФУРМАН ОЛЕНА АНДРІЇВНА

кандидат педагогічних наук,
доцент кафедри інформаційних технологій та методики навчання інформатики
Кременецька обласна гуманітарно-педагогічна академія ім. Тараса Шевченка
furmanlena111@gmail.com
orcid.org/0000-0002-3175-1814

Анотація. Стаття присвячена комплексному аналізу педагогічних умов, необхідних для ефективної інтеграції інформаційних технологій у викладання інтегрального числення у вищій школі. У дослідженні розглядається теоретичний базис моделі ТРАСК (Technological Pedagogical Content Knowledge), яка слугує концептуальною основою для поєднання технологічних, педагогічних і предметних знань викладача. Детально досліджується роль сучасних цифрових інструментів, таких як Excel для реалізації чисельних методів, онлайн-сервісу Desmos для інтерактивної візуалізації й мови програмування Python для символічних та алгоритмічних обчислень, у покращенні розуміння абстрактних математичних концепцій, зокрема визначеного інтеграла.

На основі аналізу останніх наукових публікацій і власного педагогічного досвіду визначено ключові умови ефективного використання технологій: технічну доступність (наявність апаратного й програмного забезпечення), системну підготовку викладачів (формування ТРАСК-компетентності), методичну інтеграцію інструментів у навчальний процес (від теоретичного пояснення до практичного застосування) і реалізацію системи зворотного зв'язку через автоматизоване тестування та проєктні завдання. У статті наведено практичні приклади використання технологій для розв'язання задач, зокрема обчислення інтеграла $\int_0^2 e^{2x} dx$ різними методами, що демонструє їх потенціал для візуалізації, автоматизації обчислень і розвитку алгоритмічного мислення студентів. Окремо проаналізовано ризики застосування ІТ та запропоновано шляхи їх мінімізації через поєднання цифрових і традиційних методів навчання.

Висновки статті можуть бути корисними для викладачів вищої математики, методистів і розробників освітніх програм, які прагнуть інтегрувати цифрові інструменти для підвищення ефективності навчального процесу й подолання абстрактності складних математичних дисциплін. Запропонований підхід сприяє формуванню в студентів не лише математичних знань, а й цифрової грамотності, що відповідає вимогам сучасної освіти.

Ключові слова: ТРАСК-підхід, інформаційні технології, вища математика, інтегральне числення, педагогічні умови, Python.

Постановка проблеми. Інтегральне числення є фундаментальним розділом вищої математики, необхідним для розуміння фізичних, інженерних та економічних процесів. Однак його абстрактність, створює труднощі для студентів. Традиційні методи викладання, орієнтовані на механічне застосування формул, недостатньо розвивають глибинне розуміння матеріалу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Сучасні інформаційні технології пропонують інноваційні рішення: інтерактивні симуляції, автоматизацію обчислень, візуалізацію складних понять. Проте їх ефективність залежить від системного підходу, що враховує технічні, методичні та кадрові аспекти. Концепція ТРАСК [5] є ключовою теоретичною основою для інтеграції інформаційних технологій (ІТ) у навчальний процес.

П. Мішра та П. Келер [5] підтверджують актуальність ТРАСК-підходу для інтеграції цифрових технологій у викладання вищої математики, зокрема інтегрального числення.

Для змістовного навчання з використанням технологій учителям необхідно систематично інтегрувати основні компоненти змісту, педагогічних і технологічних знань. Аналіз епістемічних мереж [2] показав, що група втручання реалізувала більше процесів інтеграції, ніж контрольна група.

П. Драйверс [4] доходить висновку, що вирішальними факторами успіху цифрових технологій у математичній освіті є розроблення цифрового інструмента й відповідних завдань, що передбачають педагогічний потенціал інструмента, роль учителя й освітній контекст.

Сучасні дослідження [1; 2; 3; 8] демонструють, що ефективне поєднання технологічних, педагогічних і предметних знань сприяє покращенню розуміння абстрактних концепцій, підвищує мотивацію студентів і розвиває критичне мислення. Особливу увагу, на нашу думку, варто приділити використанню інтерактивних інструментів (Python, Desmos, Excel) для візуалізації та чисельного моделювання інтегралів, що повністю відповідає запропонованим у статті практичним прикладам і підкреслює необхідність системної підготовки викладачів до реалізації ТРАСК-моделі.

Мета статті – окреслити педагогічні умови, за яких інформаційні технології стають ефективним інструментом у викладанні інтегрального числення, і проілюструвати їх практичними прикладами.

Виклад основного матеріалу. ТРАСК-підхід [5] (Technological Pedagogical Content Knowledge) – це концептуальна модель, яка описує види знань, необхідні вчителю для ефективного використання технологій у навчальному процесі. Вона поєднує три основні компоненти: знання предмета (Content Knowledge – СК) – знання конкретної навчальної дисципліни; педагогічне знання (Pedagogical Knowledge – РК) – розуміння методів і процесів навчання; технологічне знання (Technological Knowledge – ТК) – обізнаність у використанні цифрових інструментів і ресурсів.

У моделі ТРАСК ці знання не існують ізольовано, а переплітаються, утворюючи комбіновані сфери: ТСК (Technological Content Knowledge), ТПК (Technological Pedagogical Knowledge), РСК (Pedagogical Content Knowledge).

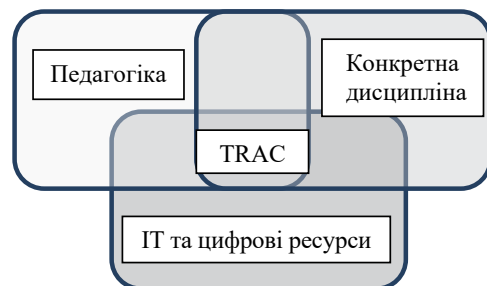


Рис. 1. Схематична модель ТРАСК

І в центрі – ТРАСК – як інтегроване знання, потрібне для організації навчального процесу з використанням ІКТ.

Модель ТРАСК запропонована П. Мішра та М. Келер у 2006 році [5]. Відтоді вона активно досліджувалася в контексті підготовки вчителів і використання ІКТ в освіті (Дж. Алдон, М. Панеро [1], Д. Поллі, [6], Дж. Росенберг, М. Келер [7]), формування цифрової компетентності педагогів та інтеграції моделі в освітні програми (І. Бекфіш, Л. Сіблі, А. Лочнер, Р. Кірхнер [2], Ц. Бохов, П. Драйверс [3], М. Табач, Дж. Тгралова) [8].

ТРАСК визнаний одним із найефективніших підходів для аналізу та розвитку професійної компетентності вчителів у цифрову епоху.

Концепцію ТРАСК можна застосувати при вивченні інтегралів у таких аспектах:

– технологічних (ТК) – уміння використовувати цифрові інструменти (наприклад, Python, Excel);

– педагогічних (РК) – знання методик навчання (наприклад, інтерактивні вправи, групова робота);

– предметних (СК) – глибоке розуміння дисципліни (інтегральне числення, його теорема й методи);

У контексті статті проаналізуємо, як викладачі можуть ефективно поєднувати ці три аспекти при викладанні інтегрального числення з використанням ІТ. Розглянемо педагогічні умови при реалізації ТРАСК-підходу.

Першочерговою умовою є технічна інфраструктура. Заклад освіти має забезпечити доступ до комп'ютерів, стабільний інтернет і безкоштовні платформи, такі як Google Colab для роботи з Python. Це дає змогу уникнути фінансового навантаження на студентів. Підготовка викладачів включає навчання базових технологічних навичок. Наприклад, педагог повинен уміти створювати графіки функцій у Python або використовувати Excel для чисельних методів. Тренінги з інтеграції ІТ у лекції є обов'язковим елементом підвищення кваліфікації. Методична інте-

грація передбачає поєднання традиційних і технологічних методів. Спочатку викладач пояснює теоретичну основу, наприклад, теорему Ньютона-Лейбніца. Потім демонструє, як обчислити інтеграл за допомогою Excel або Python. На завершення студенти самостійно працюють із технологіями, закріплюючи знання. Система оцінювання має включати автоматизовані тести (на платформах Moodle або Google Forms) для швидкої перевірки знань. Проектні завдання, такі як створення програми для чисельного інтегрування, стимулюють творчий підхід.

Наведемо приклад обчислення визначеного інтеграла $\int_0^2 e^{2x} dx$ засобами інформаційних технологій. Розглянемо обчислення інтеграла $\int_0^2 e^{2x} dx$ методом правих, лівих і середніх прямокутників з кроком 0,2 в програмі опрацювання електронних таблиць. Сума площ

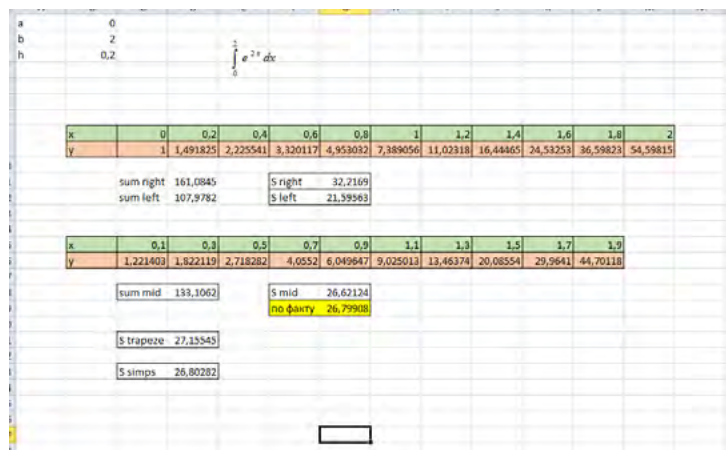


Рис. 2. Обчислення інтеграла в програмі опрацювання електронних таблиць

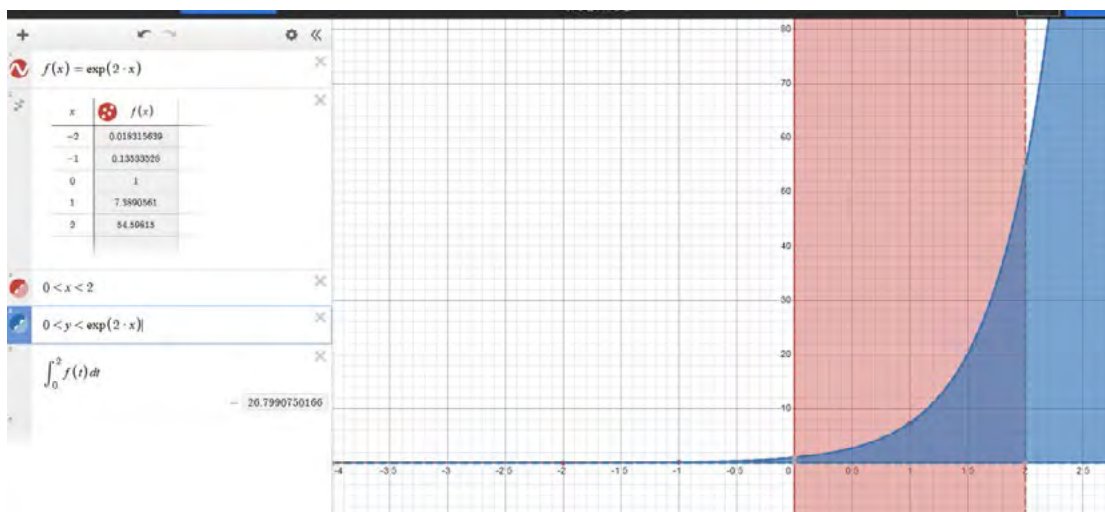


Рис. 3. Обчислення інтеграла в онлайн-сервісі Desmos

прямокутників дає наблизений результат ($\approx 32,21$; $21,59$; $26,62$ відповідно), що близький до точного значення $\int_0^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^2 = 27,2$. Зменшення кроку підвищує точність, що наочно демонструє студентам суть чисельних методів (рис. 2).

Розрахунок $\int_0^2 e^{2x} dx$ методом прямокутників засобами електронних таблиць допомагає навчити студентів будувати таблиці й формули; пояснити, чим чисельний метод відрізняється від аналітичного; запропонувати практичне завдання з аналізом похибки.

Для візуалізації геометричного змісту визначеного інтеграла використаємо онлайн-сервіс Desmos. Візуалізація інтеграла $\int_0^2 e^{2x} dx$ у Desmos дає змогу побудувати графік функції та відобразити площу під кривою (рис. 3).

Сервіс автоматично розраховує чисельне значення ($\approx 26,79$), що підтверджує теоретичний результат. Такий підхід допомагає студентам зв'язати абстрактні поняття з геометричною інтерпретацією.

Візуалізація в Desmos виконує кілька функцій: технологічну – використання інструмента «Integral» платформи; предметну – демонстрація геометричного змісту визначеного інтеграла; педагогічну – організація обговорення результатів візуалізації в аудиторії.

Програмування на Python. За допомогою бібліотеки SymPy можна виконувати символічне інтегрування цієї ж функції (рис. 4).

```
from sympy import symbols, integrate, exp
x = symbols('x')
expr = exp(2*x)
result = integrate(expr, (x, 0, 2))
print(result.evalf()) # ≈ 26.7997
```

Рис. 4. Обчислення інтеграла у Python

Використання бібліотеки SymPy для демонстрації розв'язку інтегралів (наприклад, $\int_0^2 e^{2x} dx$ автоматизує обчислення, але вимагає від викладача такого: знати синтак-

сис Python (ТК), уміти пояснити студентам, як код відображає математичну логіку (СК), вибрати оптимальний формат (РК).

Для чисельного програмування на Python використаємо методи лівих і правих прямокутників:

```
# Метод лівих
def left_rectangle_method(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    result = 0
    for i in range(n):
        result += f(a + i * h)
    return h * result

# Метод правих прямокутників
def right_rectangle_method(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    result = 0
    for i in range(1, n + 1):
        result += f(a + i * h)
    return h * result
```

Студентам пропонуємо порівняти результати символічних і чисельних методів особливо для інтегралів, які не мають аналітичного розв'язку.

Технології не мають замінити «ручні» обчислення, а лише доповнювати їх. Наприклад, студенти спочатку розв'язують інтеграл аналітично, а потім перевіряють результат у Python.

Застосування ТРАСК сприяє подоланню абстрактності. Наприклад, візуалізація інтегралів у Desmos (ТК) допомагає студентам зв'язати формули з геометричним змістом (СК), а групове обговорення (РК) закріплює цей зв'язок. Доцільним вважаємо впровадження тренінгів з ТРАСК, де педагоги вчаться поєднувати Excel/Python з методами викладання інтегрального числення. Щоб усунути ризик заміни математичної логіки «кліками» в інтерфейсах, необхідно поєднувати ІТ з класичними задачами «на папері», щоб зберегти розуміння алгоритмів

Висновки. Отже, ефективне використання інформаційних технологій у викладанні інтегрального числення вимагає комплексного підходу. По-перше, необхідна технічна інфраструктура: доступ до комп'ютерів, стабільний інтернет, безкоштовні платформи. По-друге, викладачі повинні володіти технологічними

навичками й уміти інтегрувати ІТ у заняття. По-третє, технології мають доповнювати, а не замінювати класичні методи. ТРАСК-підхід перетворює інформаційні технології з допоміжного інструмента на системний компонент навчального процесу. Для інтегрального числення це означає, що викладачі мають вільно володіти як математикою, так і технологіями; технології використовуються не для заміни, а для поглиблення розуміння; навчальні курси мають інтегрувати ІТ на всіх етапах – від

лекцій до оцінювання. Цей підхід відкриває нові можливості для подолання труднощів у викладанні вищої математики, роблячи її доступнішою та цікавішою для студентів.

Перспективи подальших досліджень убагацьмо в дослідженні ефективності використання інтерактивної візуалізації для інших математичних завдань. Також актуальним залишається вивчення впливу гейміфікації на мотивацію студентів і формування в них глибокого розуміння методів інтегрування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Aldon G., Panero M. Can digital technology change the way mathematics skills are assessed. *ZDM Mathematics Education*. 2020. Vol. 52, № 7. P. 1333–1348. URL: https://www.researchgate.net/publication/341997277_Can_digital_technology_change_the_way_mathematics_skills_are_assessed (дата звернення: 18.09.2025).
2. Backfisch I., Sibley L., Lachner A., Kirchner R. Enhancing pre-service teachers' technological pedagogical content knowledge (TPACK): Utility-value interventions support knowledge integration. *Teaching and Teacher Education*. 2024. URL: https://www.researchgate.net/publication/378342915_Enhancing_preservice_teachers'_technological_pedagogical_content_knowledge_TPACK_Utility_value_interventions_support_knowledge_integration (дата звернення: 18.09.2025).
3. Bokhove C., Drijvers P. Digital tools in mathematics education: A framework for classifying pedagogical functionalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2020. Vol. 51, № 8. P. 1235–1256. URL: https://www.researchgate.net/publication/268368816_Digital_Technology_in_Mathematics_Education_Why_It_Works_Or_Doesn't (дата звернення: 18.09.2025).
4. Drijvers P. Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). Proceedings of the 12th International Congress on Mathematics Education, Seoul, Korea, 2015. P. 485–501. URL: https://www.researchgate.net/profile/Paul-Drijvers/publication/268368816_Digital_Technology_in_Mathematics_Education_Why_It_Works_Or_Doesn't/links/548828f00cf2ef34478f06ab/Digital-Technology-in-Mathematics-Education-Why-It-Works-Or-Doesnt.pdf (дата звернення: 18.09.2025).
5. Mishra P., Koehler M. Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*. 2006. Vol. 108, № 6. P. 1017–1054. URL: <https://psycnet.apa.org/record/2006-07285-002> (дата звернення: 18.09.2025).
6. Polly D. TPACK: A framework for teacher knowledge about technology integration. *Handbook of Research on Teacher Education in the Digital Age*. 2017. P. 1–24.
7. Rosenberg J.M., Koehler M.J. Context and technological pedagogical content knowledge (TPACK): A systematic review. *Journal of Research on Technology in Education*. 2015. Vol. 47, № 3. P. 186–210. URL: http://www.mattkoehler.com/publications/Rosenberg_Koehler_JRTE_2015.pdf (дата звернення: 18.09.2025).
8. Tabach M., Trgalová J. The Knowledge and Skills that Mathematics Teachers Need for ICT Integration: The Issue of Standards. *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2019. Vol. 4. P. 249–256. URL: https://www.researchgate.net/publication/334137833_The_Knowledge_and_Skills_that_Mathematics_Teachers_Need_for_ICT_Integration_The_Issue_of_Standards (дата звернення: 18.09.2025).

TPACK APPROACHES TO THE EFFECTIVE USE OF IT TECHNOLOGIES ON THE EXAMPLE OF TEACHING THE CALCULATION OF DEFINITE INTEGRALS

BABII NADIYA VASYLIVNA

Candidate of Technic Sciences, Associate Professor at the Department of Information Technologies
and Methods of Teaching Informatics

Kremenets Taras Shevchenko Regional Academy of Humanities and Pedagogy

LOMAKOVYCH AFANASII MYKOLAYOVYCH

Honored Worker of Public Education of Ukraine,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Rector

Kremenets Taras Shevchenko Regional Academy of Humanities and Pedagogy

FURMAN OLENA ANDRIJIVNA

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor at the Department of Information Technologies
and Methods of Teaching Informatics

Kremenets Taras Shevchenko Regional Academy of Humanities and Pedagogy

Abstract. Introduction. *The teaching of integral calculus, a fundamental component of higher mathematics essential for engineering, physics, and economics, faces a significant pedagogical challenge due to its inherent abstract nature. Contemporary educational paradigms highlight the potential of information and communication technologies to address these challenges through interactive visualization, computational automation. However, the effective integration of these technologies is not automatic; it requires a systematic approach that carefully considers technical infrastructure, instructor readiness, and methodological design. The Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) framework provides a robust theoretical foundation for this integration, positing that effective technology-enhanced teaching requires an interdependent combination of technological, pedagogical, and content knowledge.*

Purpose. *The purpose of this article is to analyze the specific pedagogical conditions necessary for the successful implementation of the TPACK framework in teaching integral calculus. It aims to delineate how digital tools can be strategically employed to move beyond substitution and towards the transformation of learning processes. Furthermore, the study seeks to provide concrete, practical examples of using widely accessible technologies—namely spreadsheet software (Excel), the online graphing calculator Desmos, and the Python programming language – to enhance the teaching and learning of definite integrals, thereby bridging the gap between abstract theory and tangible understanding.*

Methods. *The research employs an analytical methodology, grounded in a review of recent literature on the TPACK and its application in STEM education. The practical validation of the proposed approach is demonstrated through detailed case studies.*

Results. *The analysis confirms that the TPACK framework is a highly effective model for structuring the integration of ICT in calculus education. The practical examples demonstrate that Excel facilitates a hands-on understanding of numerical methods, allowing students to observe how parameters like step size influence approximation accuracy; Desmos provides immediate visual feedback, enabling students to connect the formal definition of an integral to its geometric meaning as an area; Python offers a powerful environment for automating symbolic calculations and for constructing algorithms, thereby developing students' computational thinking skills alongside their mathematical knowledge.*

Originality. *The scientific novelty of this research lies in its specific, applied focus on integrating the generalized TPACK model into the particular context of teaching integral calculus in higher education. It moves beyond theoretical discussion to provide a structured, practical blueprint for implementation, complete with reproducible examples using three distinct technological approaches (spreadsheets, dynamic graphing, and programming).*

Conclusions. *The effective use of information technologies in teaching integral calculus requires a holistic, systems-based approach grounded in the TPACK framework. Key conclusions are that technology must serve to supplement and deepen traditional methods, not replace them; that a critical investment in instructor training and support is non-negotiable for success; and that technological tools are most effective when used to facilitate visualization, exploration, and algorithmic thinking. This approach transforms digital tools from auxiliary aids into fundamental, transformative components of the educational process, making higher mathematics more accessible, engaging, and comprehensible for students.*

Key words: *TPACK approach, information technology, higher mathematics, integral calculus, pedagogical conditions, Python.*

REFERENCES

1. Aldon, G., & Panero, M. (2020). Can digital technology change the way mathematics skills are assessed. *ZDM Mathematics Education*, 52(7). https://www.researchgate.net/publication/341997277_Can_digital_technology_change_the_way_mathematics_skills_are_assessed.
2. Backfisch, I., Sibley, L., Lachner, A., Kirchner, R. (2024). Enhancing pre-service teachers' technological pedagogical content knowledge (TPACK): Utility-value interventions support knowledge integration Teaching and Teacher Education. https://www.researchgate.net/publication/378342915_Enhancing_pre-service_teachers'_technological_pedagogical_content_knowledge_TPACK_Utility-value_interventions_support_knowledge_integration.
3. Bokhove, C., & Drijvers, P. (2020). Digital tools in mathematics education: A framework for classifying pedagogical functionalities. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*. https://www.researchgate.net/publication/268368816_Digital_Technology_in_Mathematics_Education_Why_It_Works_Or_Doesn't.
4. Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematics Education*, Seoul, Korea, 485–501. https://www.researchgate.net/profile/Paul-Drijvers/publication/268368816_Digital_Technology_in_Mathematics_Education_Why_It_Works_Or_Doesn't/links/548828f00cf2ef34478f06ab/Digital-Technology-in-Mathematics-Education-Why-It-Works-Or-Doesnt.pdf?_cf_chl_tk=PQTZBAzOVvmjFZtOYTC2wBP.PuO5zMWDez3IPKfeR1A-1758181052-1.0.1.1-LWrp2vufr.c5i3nvl49g2CIV9U7cwFIGSCcgQwPK-bKI.
5. Mishra, P., & Koehler, M.J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017–1054. <https://psycnet.apa.org/record/2006-07285-002>.
6. Polly, D. (2017). TPACK: A framework for teacher knowledge about technology integration. *Handbook of Research on Teacher Education in the Digital Age*, 1–24.
7. Rosenberg, J.M., & Koehler, M.J. (2015). Context and technological pedagogical content knowledge (TPACK): A systematic review. *Journal of Research on Technology in Education*, 47(3), 186–210. http://www.mattkoehler.com/publications/Rosenberg_Koehler_JRTE_2015.pdf.
8. Tabach, M., & Trgalová, J. (2019). The Knowledge and Skills that Mathematics Teachers Need for ICT Integration: The Issue of Standards. *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 249–256. https://www.researchgate.net/publication/334137833_The_Knowledge_and_Skills_that_Mathematics_Teachers_Need_for_ICT_Integration_The_Issue_of_Standards.



Отримано: 29.09.2025

Рекомендовано: 24.10.2025

Опубліковано: 17.12.2025